Mécanique analytique, Série 8

Assistants et tuteurs :

jeanne.bourgeois@epfl.ch lorenzo.fioroni@epfl.ch leo.goutte@epfl.ch
luca-stefan.dugaiasu@epfl.ch filippo.ferrari@epfl.ch mathias.findrihan@epfl.ch
nathan.brunet@epfl.ch jonas.daverio@epfl.ch remi.thomas@epfl.ch

Dans cette série d'exercices vous allez appliquer les notions des crochets de Poisson et des transformations canoniques, vues dans le dernier cours.

Exercice 1 : Crochets de Poisson

a) Montrer à l'aide des crochets de Poisson que si deux composantes du moment cinétique $\vec{L}$ sont conservées, alors la troisième l'est aussi.

b) **Problème de Kepler :** Considérer une particule de masse m dans le champ gravitationnel créé par une masse immobile M :

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} \tag{1}$$

i) Quelles sont les dimensions de G ? Faire le lien avec le potentiel habituellement utilisé pour le champ de pesanteur terrestre. On peut par exemple trouver une expression de g en fonction de M, G et R.

ii) Montrer que le moment cinétique ainsi que l'énergie sont des quantités conservées.

iii) Montrer que le vecteur de Laplace-Runge-Lenz

$$\vec{K} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - GMm\frac{\vec{r}}{r} \tag{2}$$

est une constante du mouvement.

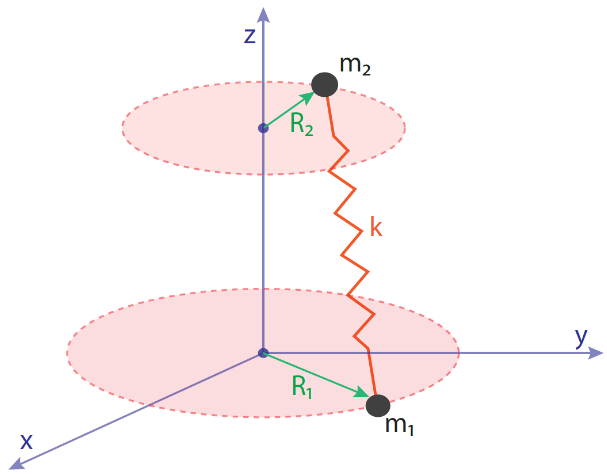
iv) Dans quelles directions pointent les vecteurs $\vec{L}$ et $\vec{K}$?

Indications : Pour simplifier les calculs, il est intéressant d'utiliser le tenseur de Levi-Civita, ε_{ijk}, et la notation d'Einstein.

Exercice 2 : Deux masses avec ressort et contraintes

Deux masses m_1 et m_2 sont contraintes à se déplacer sur deux cercles de rayon R_1 et R_2 respectivement. Les deux cercles sont parallèles au plan xy et sont libres de se déplacer tout au long de l'axe z qui passe par leurs centres. Les deux masses sont reliées entre elles par un ressort de raideur k et de longueur au repos l_0. On choisit comme coordonnées généralisées z_1, ϕ_1, z_2 et ϕ_2 de sorte que :

$$x_1 = R_1 \cos\phi_1, \qquad y_1 = R_1 \sin\phi_1$$
$$x_2 = R_2 \cos\phi_2, \qquad y_2 = R_2 \sin\phi_2$$



a) Écrire le Lagrangien et déterminer les moments conjugués.

b) Écrire l'Hamiltonien du système et les équations de Hamilton.

c) Considérer le changement de variables suivant, où ϕ_1 et ϕ_2 sont les angles définis entre l'axe x et la masse m_1, respectivement m_2 (dans un plan perpendiculaire à l'axe z) :

$$Z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}, \qquad z = z_1 - z_2$$

$$\Phi = \frac{m_1 R_1^2 \phi_1 + m_2 R_2^2 \phi_2}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2}, \qquad \phi = \phi_1 - \phi_2$$

$$P_Z = p_{z_1} + p_{z_2}, \qquad p_z = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_{z_1} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} p_{z_2}$$

$$P_\Phi = p_{\phi_1} + p_{\phi_2}, \qquad p_\phi = \frac{m_2 R_2^2}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} p_{\phi_1} - \frac{m_1 R_1^2}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} p_{\phi_2}$$

Démontrer que ce changement de variables est canonique et écrire l'Hamiltonien correspondant.

Rappel :

1. $\cos a \cos b = \dfrac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$
2. $\sin a \sin b = \dfrac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$